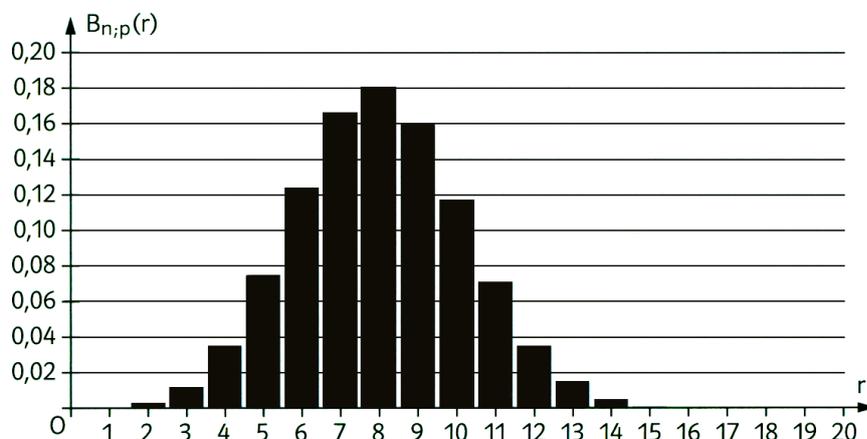


# Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Gurtmuffel)

## Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

- 1) a) Bestimme die Ableitung von  $f(x) = 4 \cdot (2x - 3)^5$ .  
 b) Bestimme eine Stammfunktion von  $f(x) = -\frac{1}{(3x - 1)^2}$ .
- 2) a) Wie viele dreistellige Zahlen kann man mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 schreiben, wenn keine Ziffer wiederholt auftreten darf?  
 b) Wie viele Handnummern 0152-xxx.xxx sind möglich, die mit einer ungeraden Zahl enden?  
 c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, von fünf verschiedenen Farben zwei auszuwählen?
- 3) In einer Urne befinden sich 4 rote und 2 schwarze Kugeln.  
 a) Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen.  
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man gleichfarbige Kugeln?  
 b) Es wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen.  
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man jetzt gleichfarbige Kugeln?  
 Zeichne bei a) und b) jeweils ein Baumdiagramm.
- 4) In einer Urne sind 4 weiße und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.  
 Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.  
 a) Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind  $\frac{1}{16}$  beträgt?  
 b) Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel weiß ist,  $\frac{8}{9}$  beträgt?
- 5) Die Zufallsvariable  $X$  ist binomialverteilt mit  $n = 20$  und  $p = 0,4$ .  
 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist im Säulendiagramm dargestellt.



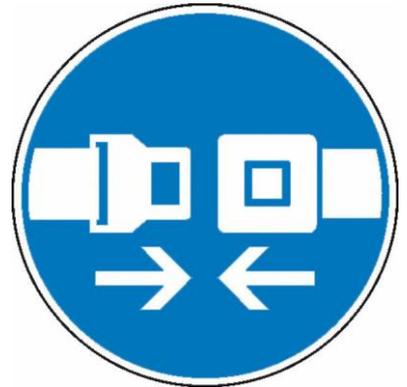
- a) Bestimme den Erwartungswert  $E(X)$ .
- b) Bestimme näherungsweise  $P(7 < X < 10)$  und von  $P(X \neq 9)$ .

# Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Gurtmuffel)

## Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Der Anteil der Autofahrer, die im Stadtverkehr noch immer keinen Gurt tragen, beträgt  $\frac{1}{6}$  aller Autofahrer.

Diese Personen werden von der Polizei umgangssprachlich als „Gurtmuffel“ bezeichnet.



- a) Die Polizei überprüft 18 Autofahrer.  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- (1) genau 3 Gurtmuffel ertappt werden?
  - (2) mehr als 4 Gurtmuffel ertappt werden?
  - (3) die Anzahl der Gurtmuffel um höchstens 2 vom Erwartungswert abweicht?
  - (4) genau die letzten 4 der kontrollierten Fahrzeuglenker keinen Gurt tragen, die 14 der kontrollierten Fahrzeuglenker aber alle angeschnallt sind?
- b) Wie viele Autos muss die Polizei überprüfen, um mit mindestens 99%-iger Sicherheit mindestens einen Gurtmuffel zu ertappen?
- c) Willi ist natürlich ertappt worden. Während er sich noch mit der Polizei um das Bußgeld herumschlägt, spielen seine Kinder Gretchen und Trudi auf dem Rücksitz ein kleines Spiel. Sie haben ein Säckchen mit 1 roten Kugel und 9 schwarzen Kugeln, also insgesamt 10 Kugeln. Gretchen schlägt nun Trudi dieses Spiel vor: Sie zahlt Trudi einen Einsatz von 10 Cent und zieht aus dem Säckchen nacheinander je eine Kugel ohne Zurücklegen, bis sie die rote Kugel hat. Sie zieht jedoch höchstens 3 Kugeln. Zieht Gretchen die rote Kugel im  $k$ -ten Zug, so erhält sie von Trudi  $5^k$  Cent ausbezahlt.
- (1) Zeichne ein Baumdiagramm für das Spiel.
  - (2) Ist das Spiel für Gretchen oder für Trudi von Vorteil?

# Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Gurtmuffel)

## Pflichtteil Lösungen:

1) a)  $f'(x) = 20(2x - 3)^4 \cdot 2$

b)  $f(x) = -(3x - 1)^{-2} \Rightarrow F(x) = (3x - 1)^{-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot (3x - 1)}$

2) a)  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b)  $5 \cdot 10^5$

c)  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10$

3) a) Baumdiagramm, dann  $P(rr) + P(ss) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{16}{36} + \frac{4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

b) Baumdiagramm, dann  $P(rrr) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

4) a)  $r =$  Anzahl der roten Kugeln

$$P(ww) = \frac{4}{4+r} \cdot \frac{4}{4+r} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{16}{(4+r)^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4+r = 16 \Leftrightarrow r = 12$$

b)  $P(\text{min. eine weiß}) = 1 - P(rr) = \frac{8}{9} \Rightarrow P(rr) = \frac{1}{9}$

$$P(rr) = \frac{r}{4+r} \cdot \frac{r}{4+r} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{r^2}{(4+r)^2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{9}(4+r)^2 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}(4+r)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}r \Leftrightarrow \frac{2}{3}r = \frac{4}{3} \Leftrightarrow r = 2 \quad (\text{oder durch Probieren})$$

5) a)  $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,4 = 20 \cdot \frac{4}{10} = 8$

b)  $P(7 < X < 10) = P(8) + P(9) = 0,18 + 0,16 = 0,34$

$$P(X \neq 9) = 1 - P(X = 9) = 1 - 0,16 = 0,84$$

# Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Gurtmuffel)

## Wahlteil Lösungen:

Für a)-c):  $X = \text{Anzahl der Autofahrer ohne Gurt}$

a)  $n = 18; p = \frac{1}{6}$

(1)  $P(X = 3) = 0,245$

(2)  $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,832 = 0,168$

(3)  $E(X) = n \cdot p = 18 \cdot \frac{1}{6} = 3$

$P(1 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X = 0) = 0,9347 - 0,0376 = 0,8971$

(4)  $P(\text{"letzte 4 Gurtmuffel"}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0,00006$

Alternativ:  $P(\text{"letzte 4 Gurtmuffel"}) = \frac{P(X = 4)}{\binom{18}{4}} = 0,00006$

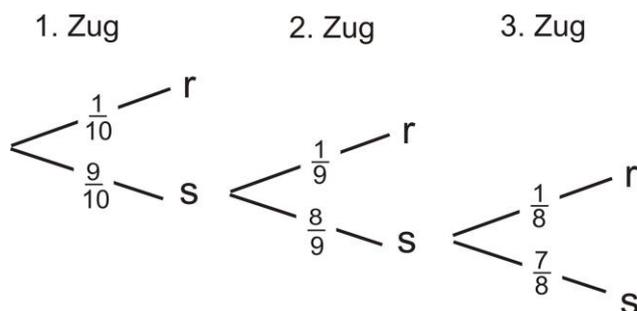
b)  $X = \text{Anzahl der Gurtmuffel}$ ,  $X$  ist  $B\left(n; \frac{1}{6}\right)$ -verteilt

$P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0,01$

n	$P(X = 0)$
25	0,01048
26	0,0087

$\Rightarrow$  mindestens 26 Autos müssten kontrolliert werden.

c) (1)



(2) Gretchen:  $E(\text{Auszahlung}) = \frac{1}{10} \cdot 5\text{Cent} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 25\text{Cent} + \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot 125\text{Cent}$   
 $= 0,5\text{Cent} + 2,5\text{Cent} + 12,5\text{Cent} = 15,5\text{Cent}$

Gretchen:  $E(\text{Gewinn}) = E(\text{Auszahlung}) - 10\text{Cent} = 5,5\text{Cent}$

Da Gretchen im Mittel 5,5Cent pro Spiel gewinnt,  
ist das Spiel für Gretchen von Vorteil.